第 16 講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体 OABC において，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺 AB を 2：1 に内分する点を P とし，線分 CP を 2：1 に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺 OA, OB の中点をそれぞれ D, E, 辺 OC を 1:2 に内分する点を F とする。3 点 D, E，F を含む平面と線分 OQ の交点を R とするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とする。辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする。また，三角形 BCD の重心を G とし, 3 点 L, M, N を含む平面と線分 AG の交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。

第16講　PART1 確認問題

1 四面体OABCにおいて，辺OA，OBの中点をそれぞれD，Eとし，AB，CPの中点をそれぞれP，Qとする。また3点C，D，Eを含む平面と線分OQの交点をRとする。

$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{c}$$

である。

$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ で表すと

$$\overrightarrow{OR}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}$$

である。

第16講　空間図形の様々な問題，座標空間における図形

PART1　直線と平面の交点

例題

四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。辺ABを2：1に内分する点をPとし，線分CPを2：1に内分する点をQとする。次の問いに答えよ。

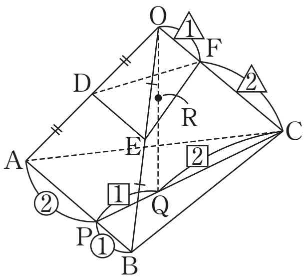
(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) 辺OA, OBの中点をそれぞれD, E, 辺OCを1:2に内分する点をFとする。3点D, E, Fを含む平面と線分OQの交点をRとするとき，$\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1) $\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

$\overrightarrow{OQ}=\dfrac{2\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{1+2}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$=\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$



(2) 点Rは直線OQ上の点であるから $\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$（$k$ は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\dfrac{2}{9}\vec{a}+\dfrac{4}{9}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)=\dfrac{2}{9}k\vec{a}+\dfrac{4}{9}k\vec{b}+\dfrac{1}{3}k\vec{c}$ …… ①

また，点Rは平面DEF上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OF}$，$s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\dfrac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\dfrac{1}{3}\vec{c}$ であるから

$\overrightarrow{OR}=\dfrac{1}{2}s\vec{a}+\dfrac{1}{2}t\vec{b}+\dfrac{1}{3}u\vec{c}$ …… ②

4点O，A，B，Cは同一平面上にないから，①，②より

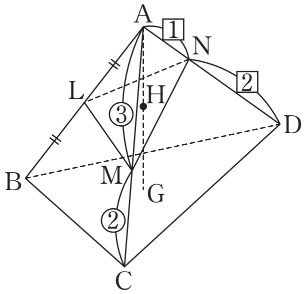
$\dfrac{2}{9}k=\dfrac{1}{2}s$，$\dfrac{4}{9}k=\dfrac{1}{2}t$，$\dfrac{1}{3}k=\dfrac{1}{3}u$　すなわち　$s=\dfrac{4}{9}k$，$t=\dfrac{8}{9}k$，$u=k$

これらと　$s+t+u=1$ より　$\dfrac{4}{9}k+\dfrac{8}{9}k+k=1$　　$k=\dfrac{3}{7}$

したがって，①より　$\overrightarrow{OR}=\dfrac{2}{21}\vec{a}+\dfrac{4}{21}\vec{b}+\dfrac{1}{7}\vec{c}$

練習

四面体 ABCD において，$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。辺 AB の中点を L，辺 AC を 3：2 に内分する点を M，辺 AD を 1：2 に内分する点を N とする。また，三角形 BCD の重心を G とし，3 点 L, M, N を含む平面と線分 AG の交点を H とする。このとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表せ。



$$\overrightarrow{AG}=\frac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

点 H は直線 AG 上の点であるから　$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AG}$（$k$ は実数）と表される。よって

$$\overrightarrow{AH}=k\left(\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)=\frac{1}{3}k\vec{b}+\frac{1}{3}k\vec{c}+\frac{1}{3}k\vec{d}\ \cdots\cdots ①$$

また，点 H は平面 LMN 上の点であるから，実数 s，t，u を用いて

$$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AL}+t\overrightarrow{AM}+u\overrightarrow{AN},\quad s+t+u=1$$

と表される。ここで，$\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\vec{d}$ であるから

$$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}s\vec{b}+\frac{3}{5}t\vec{c}+\frac{1}{3}u\vec{d}\ \cdots\cdots ②$$

4 点 A，B，C，D は同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{3}k=\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{3}k=\frac{3}{5}t,\ \frac{1}{3}k=\frac{1}{3}u\quad \text{すなわち}\quad s=\frac{2}{3}k,\ t=\frac{5}{9}k,\ u=k$$

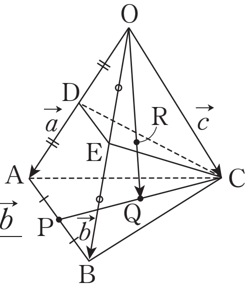
これらと $s+t+u=1$ より　$\frac{2}{3}k+\frac{5}{9}k+k=1$　　$k=\frac{9}{20}$

したがって，①より　$\overrightarrow{AH}=\frac{3}{20}\vec{b}+\frac{3}{20}\vec{c}+\frac{3}{20}\vec{d}$

第16講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：1，カ：6，
キ：1，ク：6，ケ：1，コ：3

[解説]



$$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a},\ \overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$$

点Pは辺ABの中点であるから

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$$

点Qは線分CPの中点であるから

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OC}}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}}$$

点Rは直線OQ上の点であるから，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OQ}$（$k$は実数）と表される。

よって　$\overrightarrow{OR}=k\left(\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$ [A]

$$=\frac{1}{4}k\vec{a}+\frac{1}{4}k\vec{b}+\frac{1}{2}k\vec{c}\quad\cdots\cdots①$$

> [A]　3点O，R，Qが一直線上にある条件を利用する。

また，点Rは平面CDE上の点であるから，実数s，t，uを用いて

$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OD}+t\overrightarrow{OE}+u\overrightarrow{OC}$ [B]

$s+t+u=1$

> [B]　同一直線上にない3点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$，$C(\vec{c})$ と点 $P(\vec{p})$ において，
> 点Pが平面ABC上にある
> $\Longleftrightarrow$ $\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$，
> $s+t+u=1$

と表される。ここで，$\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\vec{a}$，$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$ であるから

$$\overrightarrow{OR}=\frac{1}{2}s\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}+u\vec{c}\quad\cdots\cdots②$$

4点O，A，B，Cは同一平面上にないから，①，②より

$$\frac{1}{4}k=\frac{1}{2}s,\ \frac{1}{4}k=\frac{1}{2}t,\ \frac{1}{2}k=u$$

すなわち　$s=\frac{1}{2}k,\ t=\frac{1}{2}k,\ u=\frac{1}{2}k$

これらと　$s+t+u=1$ より

$$\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2}k=1 \qquad k=\frac{2}{3}$$

したがって，①より　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\boldsymbol{\frac{1}{6}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$